GROUPE SCOLAIRE GAUSS	CONTRÔLE N°3	1 ÈRE BAC SM

Exercice 1 (10 pts)

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{3x^2-x-2}$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+2x-8}$	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x+2}-1}$	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$
$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x<\frac{1}{2}}}\dfrac{4x+1}{4x^2-1}$	$\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x>5}}\dfrac{x+\sqrt{x^2-25}-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x-\tan 2x}{x+3\sin x}$
$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)}{x^2-4}$ on pose $X=x-2$		$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-1-\cos x}{1-\cos x\cos 2x}$	

Exercice 2 (5 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2+x+2}+x-1 & ; \quad x\geq 1 \\ f(x)=\dfrac{6x^2-3\sin(\pi x)}{4-x^2} & ; \quad x<1 \end{cases}$$

1) comparer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$ et $f(1)$ 0.5 pt

2) a) calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ 1 pt

b) montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)-2x=-\dfrac{1}{2}$ 1 pt

3) calculer $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ 1 pt

4) a) montrer que $(\forall x\in\,]-\infty,-2[)$ $\dfrac{6x^2+3}{4-x^2}\leq f(x)\leq\dfrac{6x^2-3}{4-x^2}$

b) en déduire $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ 0.5 pt

Exercice 3 (5 pts)

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{\left(1+\sqrt{u_n}\right)^2}$

1) a) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$ $u_n>0$ 0.5 pt

b) étudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$ 0.5 pt

2) on pose $v_n=\dfrac{1}{\sqrt{u_n}}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a) montrer que $(v_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $r=1$

b) exprimer v_n en fonction de n

en déduire que $(\forall n\in\mathbb{N})$ $u_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}$ 1 pt

3) on pose $S_n=\sum\limits_{k=0}^{k=n}u_k$ pour tout entier naturel n

a) montrer que $(S_n)_n$ est décroissante 0.5 pt

b) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $u_n\leq\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ 1 pt

en déduire que $(\forall n\in\mathbb{N})$ $S_n\leq 2$ 1 pt